

11 Messung großer Widerstände

Dieser Versuch führt in die Prinzipien der Widerstands-, Kapazitäts- und Induktivitätsmessung, in Auf- und Entladevorgänge, sowie in Elektrische Schwingkreise ein. Ein analoger Integrator (Operationsverstärker) wird verwendet und auch die Verwendung des Digital-Oszilloskopes ist hier von Bedeutung. Vom Digital-Oszilloskop können die Daten bei Interesse auch direkt in einen Computer eingelesen werden, oder auf dem angeschlossenen Drucker ausgedruckt werden.

11.1 Stichworte

Widerstandsmessung, Kapazitätsmessung, Induktivitätsmessung, Impedanzmessung, Kapazität eines Kondensators, Dielektrizitätskonstante, Bauformen von Kondensatoren, Plattenkondensator, Auf- und Entladung eines Kondensators, Ladungsmessung, Operationsverstärker, Elektrisches Ladungsmessgerät (Stromintegrator), Spannungsverlauf an R-C- und L-C-Kreis nach dem Einschalten und Ausschalten der Gleichspannung, Resonanzkreis, Elektrische Schwingkreise, Hochpass, Bandpass, Tiefpass, Digital-Oszilloskop, Tastkopf, Messbereichserweiterung.

11.2 Literatur

Gerthsen: Kap. 61.-6.3, 7.5 ; NPP: Kap. 19-25,31-32; Dem-2: Kap. 1,2,4-6; Wal; BS-2; Kohl-1: Kap.4; Geschke.

11.3 Zubehör

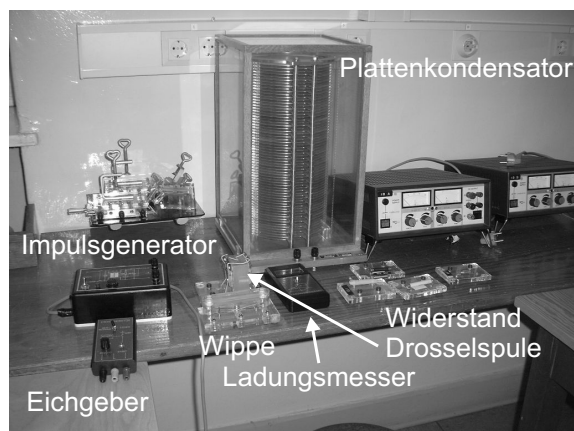


Bild 11.1: Der Versuch: Messung grosser Widerstände und Elektrische Schwingkreise.

Bild 11.1 zeigt ein Foto des Versuches mit Zubehör: a) für die Widerstandsmessung: Plattenkondensator mit 65 Platten, Wippe, Analoger Stromintegrator, Eichgenerator, Digital-Oszilloskop mit Drucker, 2 Schutzwiderstände (100 k Ω), 2 Schalter, unbekannter Widerstand R_x , Stoppuhr, Multimeter 250 V, Netzgerät (0-220 V=, 1 A=); und b) für den Schwingkreis: Impuls-generator (50 Hz, 380 V) (aufgedruckte Schaltung ansehen), Plattenkondensator C_{Pl} , Folien-Kondensator C_F (klein), Drosselspule L_D und Luftspule L_L , Widerstand $R_2 = 2\text{ M}\Omega$, Digital-Oszilloskop mit Drucker oder Computeranschluss.

Die Daten und Anleitungen von Multimeter und Oszilloskop können im Anleitungsordner oder auf unseren Internetseiten eingesehen werden. Insbesondere findet man dort auch die Eingangswiderstände dieser Messgeräte, die ja hier im Versuch eine Rolle spielen. Machen Sie sich mit der Funktionsweise des Tastkopfes am Oszilloskop vertraut. Sie können sich die Auswertung sehr vereinfachen, wenn Sie sich über die direkte automatische Angabe der Signal An- und Abfallzeiten am Oszi informieren.

11.4 Grundlagen

11.4.1 Widerstandsmessung

Häufig wird einfach das Ohmsche Gesetz $R = U/I$ für die Bestimmung eines Widerstandes verwendet.¹ Auch die WHEATSTONEsche Brückenschaltung kann zu einer genauen Widerstandsmessung verwendet werden.

Bei großen Widerständen stößt dies jedoch auf Schwierigkeiten. Neben großen Spannungen und kleinen Strömen hat man jedoch insbesondere auch mit dem Innenwiderstand des Messgerätes und weiteren Störeinflüssen zu kämpfen. Machen Sie sich das bitte anhand einer Skizze klar. Ab wann muss man hier also von großen Widerständen sprechen?

11.4.2 Auf- und Entladung eines Kondensators

Die Ladung Q , die ein Kondensator bei einer bestimmten Spannung U speichert, beträgt $Q = C \cdot U$. Die Kapazität C eines Plattenkondensators kann über den Gaußschen Satz hergeleitet werden und hängt ab vom Dielektrikum (ϵ_r), der Platten-Fläche A und dem Abstand der Platten d :

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (11.1)$$

Die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r von Luft kann hier als $\epsilon_r(\text{Luft})=1$ angenommen werden. Da die Isolation des Kondensators nie perfekt ist, entlädt sich ein Kondensator C über seinen Isolationswiderstand R_{iso} , der allerdings meist sehr groß ist. Der zeitliche Verlauf der auf dem Kondensator verbleibenden Ladung $Q(t)$ bei einer Entladung vom Anfangswert Q_0 ab dem Zeitpunkt $t = 0$ über einen Widerstand R lässt sich schreiben als:

$$Q(t) = Q_0 \exp \left[-\frac{1}{RC} \cdot t \right] \quad (11.2)$$

¹ Wie macht dies das Multimeter?

Die Schaltung zu diesem Versuch ist vereinfacht in Bild 11.2 nochmals skizziert. Wie sieht der entsprechende Aufladevorgang aus?

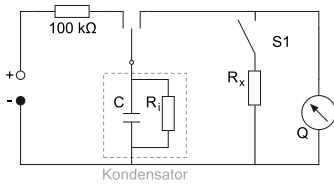


Bild 11.2: Schaltkreis für die Messung grosser Widerstände.

11.4.3 Analoger Stromintegrator

Der elektrische Stromintegrator basiert auf einem invertierenden Operationsverstärker. Operationsverstärker haben eine hohe Verstärkung, einen hohen Eingangswiderstand, einen kleinen Ausgangswiderstand, eine kleine Einstellzeit und eine Ausgangsspannung NULL, wenn am Eingang keine Spannung anliegt. Bei diesen Verstärkern nutzt man nicht nur die hohe Leerlaufverstärkung aus, sondern legt die Eigenschaften insbesondere durch Rückkopplungsschaltungen fest. Hierdurch kann man Addierer, Integrierer, Differenzierer und Logarithmierer bauen. Hieraus leitet sich auch der Name Operationsverstärker (*operational amplifier*, OpAmp) ab.

Hier wird nun durch eine Rückkopplungsschaltung der Operationsverstärker als Integrator verwendet, dessen Schaltung in Bild 11.3 dargestellt und auch auf dem Gerät aufgedruckt ist.

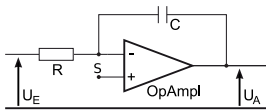


Bild 11.3: Aufbau eines Stromintegrators mit einem Operationsverstärker.

Für die Berechnung der Ausgangsspannung wird die KIRCHHOFFSche Regel auf den Summationspunkt S angewendet.

$$I_R + I_C = 0 \quad (11.3)$$

Für I_C gilt:

$$I_C = \dot{Q}_C = C\dot{U}_A \quad (11.4)$$

woraus man mit $I_R = U_E/R$ erhält:

$$U_A = -\frac{1}{RC} \int_{t_0}^t U_E dt \quad (11.5)$$

Diese Gleichung können Sie auch mit der von Ihnen in der Auswertung erhaltenen Eichkonstanten für den Stromintegrator vergleichen.

11.4.4 Schwingkreise

Auch elektrische Schwingkreise spielen eine große Rolle in der Technik, hier kann der Serien- und der Parallelschwingkreis genannt werden. Im Versuch wird ein Parallelschwingkreis (R-L-C)

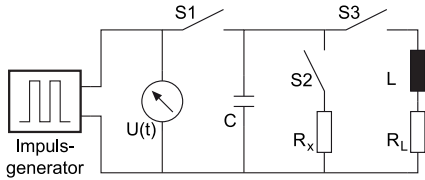


Bild 11.4: Schaltung zur Messung der Schwingkreise.

ausgemessen. Es handelt sich dabei um eine gedämpfte harmonische Schwingung:

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0 \quad \text{mit:} \quad (11.6)$$

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ; \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (11.7)$$

Diskutieren Sie sie bitte. Das Logarithmische Dekrement lautet:

$$\Lambda = \beta T = \frac{R}{2L} T. \quad (11.8)$$

Eine Herleitung für die zur Auswertung benötigten Gleichungen ist hier skizziert und beruht darauf, dass auch das Messgerät einen Eingangswiderstand² R_{Oszi} (Oszi) hat, der parallel zum angelegten, bekannten Widerstand R_2 liegt und somit einen Gesamtwiderstand R_g darstellt³:

$$\frac{1}{R_g} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{\text{Oszi}}} \quad (11.9)$$

$$\alpha = R_{\text{Oszi}} C \quad (11.10)$$

$$\beta = R_g C = \frac{R_{\text{Oszi}} R_2}{R_{\text{Oszi}} + R_2} C = \alpha \frac{R_2}{R_{\text{Oszi}} + R_2} \quad (11.11)$$

$$R_{\text{Oszi}} + R_2 = \frac{\alpha}{\beta} R_2 \quad (11.12)$$

und somit erhalten wir für den Eingangswiderstand des Oszilloskops:

$$R_{\text{Oszi}} = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) R_2. \quad (11.13)$$

Dieser wird dann bei der Auswertung benötigt. Es ist sehr instruktiv sich hier einmal die Funktionsweise des Tastkopfes anzusehen und sich die Auswirkungen auf den gemessenen Eingangswiderstand des Oszilloskops zu überlegen (Stichwort: Messbereichserweiterung).

² Da für diesen Versuchsteil mit dem Frequenzgenerator der Tastkopf (10x) für das Oszi verwendet werden muss, ist der Eingangswiderstand modifiziert gegenüber der Anleitung.

³ Dieser Teil der Messung wird noch ohne Spule durchgeführt.

11.5 Fragen

1. Warum eignet sich das Ohmsche Gesetz $R = U/I$ nur schlecht zur Bestimmung großer Widerstände? Bedenken Sie dabei den Aufbau eines Messgerätes und seine Innenwiderstände.
2. Wie erfolgt eine Messbereichserweiterung für Ampèremeter und für Voltmeter?
3. Wie erfolgt eine Kapazitätsmessung? Wie erfolgt eine Induktivitätsmessung? Wie erfolgt eine Impedanzmessung?
4. Wie funktioniert ein analoger Stromintegrator und wie lässt er sich kalibrieren? Muss er überhaupt geeicht werden?
5. Beschreiben Sie, wie mit Hilfe der Messung der Ladung $Q(t)$ eines Kondensators zu verschiedenen Zeitpunkten t_1 und t_2 ein unbekannter Widerstand bestimmt werden kann. Ist diese Methode auch für kleine Widerstände geeignet?
6. Diskutieren Sie mögliche systematische Fehler der Versuchsapparatur. Warum muss der Isolationswiderstand unabhängig vermessen werden?
7. Warum und wie lässt sich ϵ_0 in diesem Versuch bestimmen? Welche Größen beeinflussen die Kapazität eines Kondensators? Skizzieren Sie Bauformen von Kondensatoren.
8. Welchen Einfluss hat die Luftfeuchtigkeit auf die ermittelte Dielektrizitätskonstante? Welchen auf die Isolation?
9. Erklären Sie die Spannungsverläufe am R-C und R-L-C-Parallelkreis nach dem Ein- und Ausschalten der Gleichspannung.
10. Wie funktionieren Band-, Hoch- und Tiefpass?

11.6 Durchführung

Die Schaltung zum Versuch ist in Bild 11.5 dargestellt. Bitte notieren Sie auch die Nummer

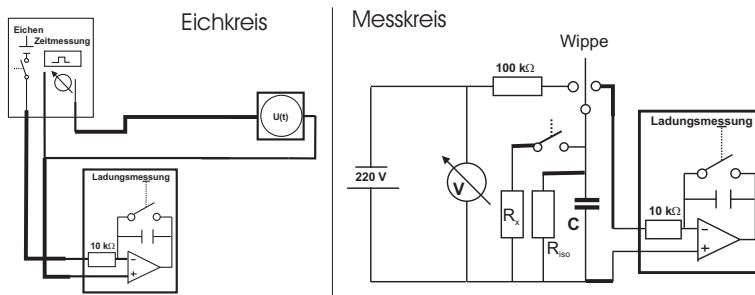


Bild 11.5: Verwendete Schaltung zur Messung großer Widerstände.

der Apparatur (A, B oder C), an der Sie den Versuch durchführen. Kalibrierung und Messung erfolgen in getrennten Schaltungen.

1. Eichung: Kalibrieren Sie das Ladungsmessgerät (Stromintegrator) in Ampèresekunden mit Hilfe von Eichgenerator und Oszilloskop durch mindestens 5 verschiedene Messungen (5 verschiedene Zeiten).

Hinweis: Der Eichgenerator kann bei der Schalterstellung »Zeitmessung« mit dem Oszilloskop auf bestimmte Zeitdauern der Spannungsimpulse eingestellt werden. Diese Schalterstellung sollte nur zum groben Einstellen der Zeit verwendet werden. Die genaue Länge des Zeitpulses wird in Schalterstellung »Eichen« mit dem Oszilloskop im Triggermodus Einzel- folge (Knopf »single seq.« oben rechts) bestimmt. In der selben Schalterstellung »Eichen« wird dann das Ladungsmessgerät mit dem entsprechenden Puls beaufschlagt, und zwar mit genau einem. Spannung U_t und Vorwiderstand R_v (Eingangswiderstand des Integrators) notieren! Das Ladungsmessgerät hat einen »Null«-Taster zum Start einer neuen Messung, hiermit wird es auch eingeschaltet. Auto-Abschaltung des Integrators nach ca. 5 min zur Schonung der Batterie.

2. Entladung:

- Der Plattenkondensator wird mit Hilfe der Wippe zuerst auf 220 V (Schutzwiderstand!) aufgeladen und dann sofort durch den Messkreis entladen ($t = 0$ s). Ladung $Q_0(0)$ notieren! Messung bitte 5 mal durchführen.
- Parallel zum Plattenkondensator wird der unbekannte Widerstand R_x geschaltet, der Kondensator aufgeladen und dann jeweils nach bestimmten Zeiten t über das Ladungsmessgerät entladen (d.h. nach jeder Messung bitte neu aufladen!). Man messe die nach der Zeit t auf dem Kondensator verbliebene Ladung $Q(t)$. Mindestens 10 Messpunkte. (Vorschlag: $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 20, 30$ sec, 1 min. Sie sollten aufhören, wenn die Ladung unter 0,01 Skt. abfällt.⁴ Auch $t = 0$ ist ein Messpunkt.
- Zur Bestimmung des Isolationswiderstandes R_{iso} wird Messung 2b ohne den unbekannten Widerstand wiederholt, mindestens 5 Messpunkte. ($0 \text{ min} \leq t \leq 20 \text{ min}$. Vorschlag: 0, 1, 2, 5, 10 min. Sie können aufhören, wenn die Ladung unter 0,01 Skt. abfällt. Falls dies zu wenig Messpunkte ergibt, auch für kleinere Zeiten messen.). Auch $t = 0$ ist ein Messpunkt.

3. Schwingkreise (RC und RLC): Messung des Spannungsverlaufs $U(t)$ am Kondensator (Plattenkondensator) bei Aufladung mit dem Impulsgenerator. Benutzen Sie bitte hierfür das bereitstehende Digital-Oszilloskop mit Drucker⁵:

- Impulsgenerator allein (zur Kontrolle).
- Impulsgenerator mit Plattenkondensator.
- Plattenkondensator mit $2 \text{ M}\Omega$ Widerstand parallel.
- Plattenkondensator mit unbekanntem R_x parallel.
- Plattenkondensator mit Drosselspule parallel.
- Plattenkondensator mit Luftspule parallel.
- Kommerzieller Kondensator mit $2 \text{ M}\Omega$ Widerstand parallel.

Achten Sie bitte auf die Skalierung der Achsen! Der Eingangswiderstand und die Eingangskapazität des Oszilloskops sind in den entsprechenden Anleitungen (manchmal an dessen

⁴ Sollte das aber schon bei sehr kurzen Zeiten passieren, ist an Ihrem Aufbau wahrscheinliche etwas nicht in Ordnung.

⁵ Sie können die Daten vom Oszilloskop auch direkt in einen PC einlesen, das dazu benötigte Programm und Kabel erhalten Sie beim Betreuer.

Frontplatte) angegeben. Bitte notieren Sie sich diese Werte.⁶ Die Werte können Sie auch im Anleitungsordner und auf unseren Webseiten (Geräte) einsehen. Das Digital-Oszilloskop kann die Abfallzeiten auch direkt messen und im Ausdruck angeben. Ein solcher Beispielausdruck ist in Bild 11.6 dargestellt.⁷

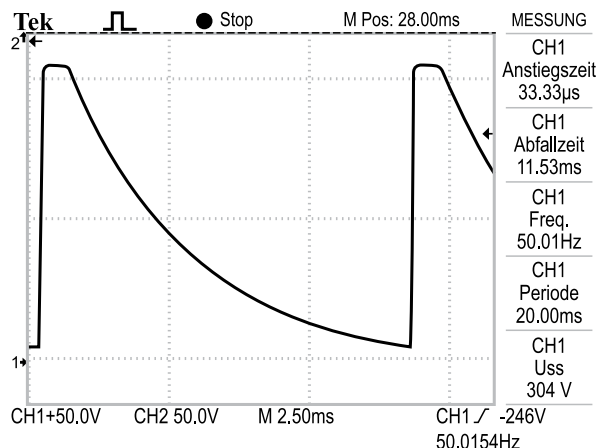


Bild 11.6: Ein Beispielausdruck des Digital-Oszilloskops (Entladung des Plattenkondensators über den 2 MΩ Widerstand. Beachten Sie die Angabe der Abfallzeit (Entladezeit).

4. Messen Sie bitte den ohmschen Widerstand R_L von Drosselspule, Luftspule, 2 MΩ Widerstand R_2 , Plattenkondensator $R_{C_{Pl}}$ und den unbekannten Widerstand R_x mit einem Multimeter und notieren Sie diese. Notieren Sie die Daten der Luftspule.
5. Messen Sie die Kapazität des Plattenkondensators C_{Pl} und des Folienkondensators C_F mit dem Multimeter (Achtung: nur die neuen grünen Multimeter haben eine Kapazitätsmessung).
6. Alternativ können Sie für diesen Schwingkreisteil des Versuches anstelle des Rechteckgenerators auch Netzteil und Wippe aus dem ersten Versuchsteil verwenden, d.h. in der ersten Schaltung wird einfach der Stromintegrator durch das Oszi ersetzt. Da Sie hier Digital-Oszis verwenden, können Sie auch mit einzelnen Spannungsimpulsen über die Wippe arbeiten. Hierzu müssen Sie die Triggerung des Oszi auf »single« stellen. Ihre Betreuerin/Ihr Betreuer gibt Ihnen hierbei gerne Hilfestellung. Durchführung und Auswertung bleiben dann unverändert und werden dadurch eher etwas erleichtert.

11.7 Angaben

Der Plattenkondensator hat einen Plattenradius von $r = 10$ cm und einen Plattenabstand von $d = 0,5$ cm. Bei dieser Geometrie machen sich Randeffekte schon deutlich bemerkbar und müssen

⁶ Die Verwendung des Tastkopfes ändert diesen Eingangswiderstand.

⁷ Details über die dort angegebenen Anstiegs- und Abfallzeiten finden Sie in der Oszi-Anleitung.

berücksichtigt werden. Die Zahl der Platten beträgt $n = 65$. Für solch einen Plattenkondensator mit n Kreisplatten ist der genaue Wert der Kapazität C nach KIRCHHOFF [41]:

$$C_n = (n-1) \varepsilon_0 \varepsilon_r \left\{ \frac{\pi r^2}{d} + r \cdot \left[\ln \left(\frac{16\pi r}{d} \right) - 1 \right] \right\} \quad (11.14)$$

Der Widerstandswert beträgt $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$, die Spannung des Eichgenerators $U_t = 1,238 \text{ V}$ und der Eingangswiderstand des Ladungsmessers beträgt $R_v = 10 \text{ k}\Omega$.

11.8 Auswertung

1. Bestimmen Sie die Eichkonstante des elektrischen Stromintegrators (Skt./ μC).
2. Berechnen Sie ε_0 mit Hilfe von Gleichung (11.14) aus den Messungen 1 und 2a.
3. Bestimmen Sie mittels $Q(t)$ aus 2b und 2c den Isolationswiderstand R_{iso} und den unbekannten Widerstand R_x . Bitte auch $t = 0$ hierfür mit einbeziehen. Hinweis: in 2b messen Sie nicht R_x direkt, sondern nur mit R_{iso} zusammen den Gesamtwiderstand R_g .
4. Schwingkreise: Man skizziere und erkläre die beobachteten Spannungsverläufe $U(t)$.
5. Aus den Spannungsverläufen $U(t)$ aus 3a bis 3c bestimmen Sie bitte die Kapazität C_{Pl} des Kondensators und den Eingangswiderstand R_{Osz} des Oszilloskops. Nutzen Sie dazu aus⁸:

$$R_0 C = \alpha \quad (\text{Messung 3b}) \quad , \quad R_g C = \beta \quad (\text{Messung 3c}) \quad (11.15)$$

$$R_0 = \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) R_2 \quad (11.16)$$

6. Bestimmen Sie aus Messung 3d den unbekannten Widerstand R_x . Machen Sie eine Fehlerabschätzung mittels Fehlerfortpflanzung.
7. Mit $U(t)$ aus Messung 3e und 3f bestimmen Sie bitte die Induktivität L und den Verlustwiderstand R_L der Drosselspule und der Luftspule. Benutzen Sie hierzu das logarithmische Dekrement $\Lambda = \frac{R}{2L} T$ mit der Periodendauer T . Leiten Sie dann bitte für die Induktivität folgende Formel her:

$$L = \frac{1}{C} \frac{T^2}{4\pi^2 + \Lambda^2}. \quad (11.17)$$

Damit kann dann auch der Verlustwiderstand R_L der Drosselspule und der Luftspule berechnet werden.

8. Vergleichen Sie die Ergebnisse für R_x aus der Entladungsmessung 2c und aus der Schwingkreismessung 3d.

⁸ Beachten Sie bitte, dass sich der Kondensator u.U. nicht vollständig entlädt, bevor der nächste Spannungsimpuls kommt.

9. Berechnen Sie aus Messung 3g die Kapazität des kommerziellen Kondensators und vergleichen Sie sie mit der des Plattenkondensators. Was fällt Ihnen auf und wie erklären Sie dies?
10. Vergleichen Sie die hier erhaltenen Ergebnisse mit den Messungen 4 und 5 durch das Multimeter als Widerstandsmessgerät, dabei insbesondere die Kapazitäten C und die ohmschen Widerstände der Drosselspule und Luftspule R_L (Bei der Drosselspule ist R_L stark unterschiedlich für beide Messungen. Für die Luftspule sollten Sie übereinstimmen. Warum?).
11. Berechnen Sie aus den Daten der Luftspule deren Induktivität L und vergleichen Sie diese mit der von Ihnen experimentell ermittelten.

11.9 Bemerkungen

Die beiden ersten Teile (Eichmessung und Widerstandsmessung) sollten in getrennten Schaltkreisen aufgebaut werden, also erst Eichen und dann den Messkreis separat (ohne Eichkreis) aufbauen. Es hat sich als günstig erwiesen, die Schaltung großzügig und ordentlich aufzubauen. Der Stromintegrator sollte möglichst weit weg vom großen Netzteil und sonstigen Störstrahlern stehen, um Störungen und Einkopplungen zu vermeiden.

Interessierte können auch den Stromintegrator durch das Digitaloszilloskop ersetzen und dann damit die Ladung durch Integration des Spannungssignals erhalten.

Sie können auch Ihr Notebook mitbringen, denn das Oszi kann an die serielle oder die IEEE488 Schnittstelle zur Datenübertragung angeschlossen werden. Entsprechende Programme und Kabel zum Auslesen der Oszilloskope stehen zur Verfügung. Bitte bei Interesse bei der Betreuerin/beim Betreuer erfragen.

Die Einzelheiten, Daten und Bedienungsanleitung der Messgeräte und des Oszis können im Geräteordner oder auf den Praktikums-Webseiten eingesehen werden.